Conjuntos numéricos: reais

Objetivo
Aprender sobre o conjunto dos reais, intervalos reais, seus elementos e suas relações

Teoria

Conjunto dos Números Reais (R)

Os números reais, representados por R, são a união dos conjuntos dos Racionais Q com os Irracionais $R - Q$.

Ao longo deste material praticaremos cálculos envolvendo todos os números reais.

Existe número não real? Sim! Por exemplo, no conjunto dos números reais, temos que todo número ao quadrado resulta em um valor não negativo. Exemplos: $(-2)^2 = 4$ e $2^2 = 4$.

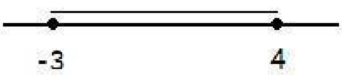
Assim, um exemplo de número não real é aquele que, quando elevado ao quadrado, resulta em um valor negativo. A dizer, x, tal que $x^2 = -1$, é um número chamado **imaginário**. Entretanto, esse não será o foco deste material.

Notações possíveis para intervalos reais

Entre dois números reais distintos existem infinitos números reais. Assim, uma forma de escrever todos esses números decorre de algumas notações.

No caso da notação de intervalos reais, ela é representada com os extremos do conjunto entre colchetes (ou parêntesis). Ela é essencial na resolução de inequações que apresentam infinitas soluções.

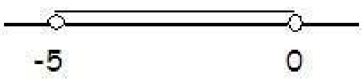
Os colchetes virados "para dentro" nos mostram que o intervalo inclui os extremos, ao passo que virados "para fora" os excluem. Geometricamente, os extremos são representados por bolas pretas e brancas, respectivamente. A seguir temos exemplos de representações geométricas, em que utilizamos a reta real, com a correspondente notação de intervalos reais abaixo:



$x \in [-3; 4]$

$x \in]-5; 3]$

$x \in [-2; 3[$



$x \in]-5; 0[$

$x \in]-\infty; 3]$

$x \in]5; +\infty[$

Observação: um sinônimo para os colchetes virados para fora (exclusão) é o uso dos parênteses. Por exemplo: (2, 3] é o mesmo é]2, 3].

Como escrito anteriormente, um possível substituto para os colchetes voltados para fora são os parênteses. Exemplo: o intervalo $]1; 2]$ pode ser escrito como $(1; 2]$.

<u>Observação:</u> escreveremos as regiões que se extendem ao infinito como abertas.

Uma outra forma de escrever um conjunto é pela notação por compreensão.

Exemplo, escrever que $x \in]-5; 3]$ é o mesmo que escrever que $\{x \in R \mid -5 < x \leq 3\}$.

Exercícios de fixação

1. João emprestou ao seu irmão R$ 30,00. Após alguns dias ele recebeu R$ 22,50 de volta, mas seu irmão precisou novamente de sua ajuda e ele lhe entregou outros R$ 15,00. Mais tarde, o irmão de João lhe devolveu R$ 19,50. Quanto o irmão ainda lhe deve?

a) R$ 2,00.

b) R$ 5,50.

c) R$ 4,50.

d) R$ 3,00.

2. Doze amigos foram a uma pizzaria e pagaram juntos R$ 390,48. Sabendo que essa conta foi dividida igualmente entre os doze amigos, quanto cada um deles pagou?

a) R$ 3,25

b) R$ 325,40

c) R$ 65,00

d) R$ 15,44

e) R$ 32,54

3. O valor de A é igual a

$$A = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}$$

a) $\frac{50}{33}$

b) $\frac{7}{100}$

c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{1}{2}$

e) N.D.A.

4. Simplifique valor de $4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7$.

5. Dados os intervalos $A = [-2; 2), B = (0; +\infty)$ e $C = (-\infty; 1]$, aponte os intervalos que satisfazem:

a) $A \cap B \cap C$

b) $A - C$

Exercícios de vestibulares

1. Pitágoras estabeleceu a seguinte relação entre as sete notas musicais e números racionais:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Para encontrarmos o número $\frac{16}{27}$, relativo à nota LÁ, multiplicamos o $\frac{2}{3}$ (correspondente da nota SOL) por $\frac{8}{9}$. Assim, para obtermos $\frac{3}{4}$ (relativo à nota FÁ), devemos multiplicar $\frac{64}{81}$ (da nota MI) por

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{9}{8}$

c) $\frac{243}{256}$

d) $\frac{256}{243}$

e) $\frac{192}{324}$

2. Seja o número real k, tal que $k = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. Sobre o valor de k é correto afirmar que

a) $k \in Z$, tal que $k > 0$.

b) $k \in R$, tal que $k < -2$.

c) $k \in Q$, tal que $k < 2$.

d) $k \in I$, tal que $k > 2$.

e) $k \in R$, tal que $k > 0$.

3. O número real $w = \frac{1}{3+\sqrt{5}}$ pode ser escrito da forma $w = a + b \cdot \sqrt{5}$ para certos números naturais racionais a e b cuja soma vale

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

4. Sejam r_1 e r_2 números racionais quaisquer e s_1 e s_2 números irracionais quaisquer. É incorreto afirmar que

a) O produto $r_1 \cdot r_2$ será sempre um número racional.

b) O produto $s_1 \cdot s_2$ será sempre um número irracional.

c) O produto $s_1 \cdot r_1$ será sempre um número irracional.

d) A soma $r_1 + r_2$ será sempre um número racional.

e) Para $r_2 \neq 0$, a razão $\frac{r_1}{r_2}$ será sempre um número racional.

5. (Pucrj 2022) Considere o número irracional $x = \sqrt{7} + \sqrt{11}$ Assinale a alternativa correta:

a) $x < 5$

b) $5 < x < 6$

c) $6 < x < 7$

d) $7 < x$

6. Observe as afirmações abaixo:

I. O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

II. A soma de dois números irracionais é sempre um número racional.

III. O produto de um número irracional por um racional não nulo é sempre um número irracional.

IV. A soma de um número irracional com um racional é sempre um número irracional.

V. O conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Assinale a alternativa correta:

a) Apenas as alternativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas as alternativas II e III são verdadeiras.

c) Apenas as alternativas II, III e IV são verdadeiras.

d) Apenas as alternativas I e V são verdadeiras.

e) Apenas as alternativas III, IV e V são verdadeiras.

7. Resolvendo a expressão numérica abaixo:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2}{5} \div \frac{3}{10}$$

Qual é o resultado encontrado, em sua forma irredutível?

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{10}{6}$

c) $\frac{260}{123}$

d) $\frac{90}{54}$

e) $\frac{12}{25}$

8. (Enem) Em um aeroporto, os passageiros devem submeter suas bagagens a uma das cinco máquinas de raio-X disponíveis ao adentrarem a sala de embarque. Num dado instante, o tempo gasto por essas máquinas para escanear a bagagem de cada passageiro e o número de pessoas presentes em cada fila estão apresentados em um painel, como mostrado na figura.

Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3	Máquina 4	Máquina 5
35 segundos 5 pessoas	25 segundos 6 pessoas	22 segundos 7 pessoas	40 segundos 4 pessoas	20 segundos 8 pessoas

Um passageiro, ao chegar à sala de embarque desse aeroporto no instante indicado, visando esperar o menor tempo possível, deverá se dirigir à máquina:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

9. (Enem) Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho A partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho B, que havia saído do topo da montanha. Quantos segundos após a partida do bondinho B partiu o bondinho A?

a) 5.

b) 10.

c) 15.

d) 20.

e) 25.

10. (Enem) Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15h e chega à cidade B às 18h (respectivos horários locais). Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até as 13h do dia seguinte (horário local de A). Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s)

a) 16h.
b) 10h.
c) 7h.
d) 4h.
e) 1h.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. D

Vamos ver cada um dos passos:

Primeiro empréstimo: R$ 30,00
Primeira devolução: R$ 22,50
Segundo empréstimo: R$ 15,00
Segunda devolução: R$ 19,50
Dívida: ?

1º passo: subtrair o valor que foi devolvido do primeiro empréstimo.
30,00 – 22,50 = 7,50
2º passo: somar o segundo empréstimo com o valor que o irmão ainda deve.
15,00 – 7,50 = 22,50
3º passo: subtrair a nova quantia devolvida.
22,50 – 19,50 = 3,00

Portanto, o irmão de João ainda lhe deve R$ 3,00

2. E

Para encontrar o valor pago por amigo, é necessário dividir a conta da pizzaria pelo número de pessoas entre as quais ela foi dividida. Observe:
$390{,}48 \div 12 =$
Observe que é necessário multiplicar divisor e dividendo por 100 para realizar essa multiplicação. Assim, teremos:
$39048 \div 1200 = 32{,}54$
Logo, a resposta é a alternativa **E**.

3. D

$$A = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{15}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = \frac{\frac{24-15}{60}}{\frac{2+1}{10}} = \frac{\frac{9}{60}}{\frac{3}{10}} = \frac{9}{60}\cdot\frac{10}{3} = \frac{90}{180} = \frac{1}{2}$$

4. $9\sqrt{2}-7$

Em $4\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7$, chamando $\sqrt{2}$ de x, teríamos $4x+5x-7=9x-7$. Assim, temos $9\sqrt{2}-7$.

5.

a) Nos três intervalos temos os números reais de 0 a 1 (mas sem incluir o 0) contemplados. Assim, $A \cap B \cap C =]0;1]$.

b) Os elementos que só estão em A, em relação a C, são os números reais entre 1 e 2. Isto é, $A - C =]1;2[$.

Exercícios de vestibulares

1. C

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{64}{81}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{81}{64} = \frac{243}{256}$$

2. B

Calculando $k = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2} = -2{,}8 \Rightarrow \{k \in R / k < -2\}$

3. E

$$w = \frac{1}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. B

A alternativa **B** é a incorreta, pois o produto de dois irracionais pode ser racional. Exemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$.

5. B

Tem-se que

$$x = \sqrt{7} + \sqrt{11} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{11})^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 18 + 2\sqrt{77}.$$

Logo, sendo $8 = \sqrt{64} < \sqrt{77} < \sqrt{81} = 9,$ vem

$25 < 34 < x^2 < 36 \Rightarrow 5 < x < 6.$

6. E

I. Falso. Calculando $(\sqrt{2})^2 = 2.$

II. Falso. Calculando $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

III. Verdadeiro. O produto de um número irracional por um número racional não nulo é sempre um número irracional.

IV. Verdadeiro. A soma de um número irracional com um número racional é sempre um número irracional.

V. Verdadeiro. O conjunto dos números reais é a união do conjunto dos número racionais com o conjunto dos números irracionais.

7. A

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2}{5} \div \frac{3}{10} = \left[\frac{4}{9}\frac{5-2}{4}\right] + \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

8. B

O tempo de espera nas máquinas 1, 2, 3, 4 e 5 é, respectivamente, igual a $35 \cdot 5 = 175s, 25 \cdot 6 = 150\,s, 22 \cdot 7 = 154s, 40 \cdot 4 = 160s\ e\ 20 \cdot 8 = 160\,s.$

Portanto, o passageiro deverá se dirigir à máquina 2.

9. B

A travessia dura 90 segundos (ou 1,5 minutos). Se o bondinho A se deslocou por 40 segundos até determinado ponto, isso quer dizer que o bondinho B deve ter se deslocado por 50 segundos, na direção oposta, até cruzar com o bondinho A. Ou seja, o bondinho B partiu 10 segundos antes do bondinho A – Alternativa **B**. Ou, ainda:

$$V_A = V_B = \frac{d}{t}$$

$$d_A = \frac{d}{90}.40 = \frac{4d}{9}$$

$$d_B = \frac{5d}{9} \Rightarrow t_B = \frac{\frac{5d}{9}}{\frac{d}{90}} = 50s$$

10. D

Sabendo que a duração da viagem de A para B é de 6 horas, e que saindo da cidade A às 15 horas o voo chega à cidade B às 18 horas, e que a diferença de fusos horários entre A e B é de 3 horas, se na cidade A são 13 horas e na cidade B são 10 horas, o executivo deve pegar um voo, na cidade B, que saia, no máximo, às 10 - 6 = 4 horas.